A HÉVIZES EREDETÜ GÖMBFÜLKÉK KIALAKULÁSÁNAK ELMÉLETI VIZSGÁLATA: MÁSODIK KÖZELITÉS

Dr Szunyogh Gábor

A hévizes eredetü gömbfülkék kondenzviz-korróziós kialakulásának gondolatát Müller /1974/ vetette fel, és megadta az üregképződés folyamatának kvalitativ leirását. A fülkék növekedési sebességének számszerü vizsgálatával Szunyogh /1982/ foglalkozott, és levezetett egy összefüggést a már kialakult, gömbalaku üregek tágulásának sebességére, a befoglaló kőzet fizikai-, kémiai paraméterei, a barlangi levegő széndioxid tartalmának és a hévizes tó hőmérsékletének függvényében. Ezt követőleg - a nyert eredmények figyelembevételével - vita alakult ki arról, hogy ezen üregek a vizgőz lecsapódása révén, viztükör felett, vagy más korróziós mechanizmussal a viztükör alatt jöttek-e létre. Eldöntetlen volt pl. az a kérdés, hogy valóban gömb-e az"ideális alak" a kondenzviz-korrózió szempontjából /Müller,1974/, és milyen lépéseken át alakul az ki egy, a főtébe felnyuló hasadékból, kürtőből.

Jelen cikkben arra törekedtünk, hogy olyan egyenletrendszert állitsunk fel, amelyet megoldva - hacsak közelitőleg is - de számszerü választ kapjunk e kérdésekre. Ennek érdekében /második közelitésként/ olyan modellt vizsgáltunk, mely nem korlátozódott gömbszimmetrikus esetre. Az első közelités szerint /Szunyogh, 1982/ a tágulás üteme a levegő CO_2-tartalmától csak kis mértékben /köbgyök szerint/ függ, és nagyon lassu /5 - 20 μm/év/, mert a kőzet rossz hővezetőképessége a kondenzáció sebességét lefékezi. Mindez azt a feltételezést sugallja, hogy a gömbfülke növekedését elsősorban a kőzet hőelvonó képessége szabja meg. Az alább tárgyalt második közelitésben ezt a tényezőt tekintjük alapvetőnek, a barlang légterében lejátszódó konvekcióról pedig feltételezzük, hogy az a fülke felülete mentén állandó gőz- és széndioxid-tartalmat biztosit. /Jelenleg még nem dönthető el, hogy ez az elhanyagolás milyen mértékben módositja a második közelitésből származó következtetéseket/.

Az egyenletek analizisével a kondenzviz-korróziós üregképződés több, eddig ismeretlen tulajdonsága feltárható, ill. számszerüsithető.

Meghatározzuk az"ideális fülkealakot" és megvizsgáljuk annak "stabilitását". Ideális az az üregforma, amely akkor jönne létre, ha a kondenzviz-korróziót más tényezők /légáramlás, kőzet-inhomogenitások, időszakos vizkitöltések, erróziós hatások, hőmérsékleti anomáliák, stb./ nem befolyásolnák. A valóságban ilyen helyzet igen ritkán adódik ugyan, de ez adja a "vázát" minden kondenzviz-korróziós üregnek. Az "ideális alakot" összevetve a valódi gömbfülkék formájával, választ kaphatunk a fentebb idézett vita kérdéseire.

A fülkealak "stabilitása" alatt azt értjük, hogy egy kis zavar a barlang formájában a további oldódás során elsimul-e, vagy még jobban felerősödik.

A feladat matematikailag ugy fogalmazható, hogy keressük a fülke felületét megadó függvényt, mely /a hozzákapcsolódó fizikai jellemzőkkel együtt/ kielégiti a tömeg- és energiamegmaradás tételét, a hővezetés törvényeit, a vizgőz lecsapódásának energetikáját tükröző képleteket és a mészkő hidrokarbonátos oldódásának egyenleteit. Bár a keresett felület általános esetben nem matematikai gömb, a továbbiakban maradunk a gömbfülke szóhasználatnál.

Az üregképződés fizikai alapjai

Tételezzük fel, hogy a melegvizü barlang mennyezetéből egy kis kürtő /hasadék/ nyulik fel, melyet T_0 hőmérsékletü vizgőz tölt ki. A levegő melegiti a kőzetet, igy abban a korábban párhuzamos helyzetü izotermák a kürtő felett összesürüsödnek, a bejárata közelében ritkulnak /1.ábra/.

Igy a hőmérsékletesés /termikus gradiens/ helyről-helyre változik. Az üreg felületére időegység alatt éppen annyi viz csapódhat le, hogy a felszabaduló hőt a közet el tudja vezetni. Mivel az időegység alatt elszállitott hő arányos a termikus gradienssel, azért a kürtő különböző részein különböző mértékü lesz a kondenzáció. A közetre került viz a levegő széndioxidja révén agresszivvé válik. Ámde a lecsapódott viz tömegével arányos a kioldott $CaCO_3$ tömege, következésképpen a korrózió sebessége is más és más az üreg különböző pontjaiban. A felső részen a tágulás gyorsabb, a kürtő bejárata közelében pedig /ahol a közet átmelegszik és a termikus gradiens lecsökken/ lelassul. Ezzel magyarázható /egyéb hatótényezők mellett, Müller, 1974/, hogy miért szükek alul a gömbfülkék.

Ahogy a fülke bővül, és változtatja alakját, ugy időről-időre torzulnak az izoterma-felületek is. E folyamat magával vonja a korrózió sebességének térbeli és időbeli folyamatos változását. A kondenzviz-korróziós üreg növekedését tehát elsősorban a fülke pillanatnyi alakjának és a közet hőmérsékleteloszlásának egymásra ható rendszere szabályozza.

A számitásoknál azzal az egyszerüsitő feltételezéssel éltünk, hogy a folyadékfilm leszivárgása elég lassu ahhoz, hogy az oldat már a lecsapódás közelében telitődjön $CaCO_3$-mal. Figyelmen kivül hagytuk a lecsapódott viz áramlástani problémáit is, melyek bár befolyással vannak a tágulás menetére, de -véleményünk szerint- nem módositják alapvetően a fentebb ismertetett képet.

A gömbfülke alakját megadó egyenletrendszer

A fülke kialakulását gömbkoordináta-rendszerben vizsgáljuk /2. ábra/. Az origó a fülke bejárata felett H magasságban található. A kőzet valamely, tetszőleges P pontjának helyét az /o/ origótól való r távolság, és a hozzá-huzott egyenesnek a függőlegessel bezárt ϑ szöge határozza meg. Hengerszimmetriát tételezünk fel, de a levont következtetések szimmetria-mentes esetre is érvényesek. A fülke felületét az

$$R=R(\vartheta,t)$$

függvény adja meg, ahol R a felület valamely pontjához huzott rádiusz, ϑ a polárszög, t az idő. $R(\vartheta,t)$ egyelőre ismeretlen, és feladatunk éppen a differenciálegyenletének felirása, majd megoldása.

Tekintsük a fülke valamely /tetszőleges/ ϑ irányban elhelyezkedő Q pontját /3. ábra/. Távolsága az origótól a t időpillanatban $R(\vartheta,t)$, amely a kioldódás révén dt /igen rövid/ idő alatt dR -rel megnő. Jelöljünk ki Q környezetében egy kicsiny dA területü felületelemet. dt idő alatt e felületre dm_v tömegü viz csapódik, mely dm_k tömegü kőzetet old ki. A kioldott kőzet egy olyan hasábból távozott, /a 3. ábrán bevonalkázva/, amelynek alapterülete dA, magassága db, térfogata $dA \cdot db$. A 3. ábráról látható, hogy

$$db = \cos\alpha \cdot dR,$$

ahol α a felület $\vec{n}$ normálisa és az R rádiusz által bezárt szög. A kőzet ϱ_k sürüségének ismeretében /ϱ_k =2600 kg/m^3/

$$dm_k = \varrho_k \cdot dA \cdot \cos\alpha \cdot dR. \qquad /1/$$

A kioldott kőzet tömege arányos az oldószer tömegével. Ernst /1961/ nyomán:

$$dm_k = \sqrt[3]{k \cdot p} \cdot dm_v, \qquad /2/$$

ahol p: a levegő CO_2 tartalmának parciális nyomása

k: arányossági tényező /0,748.10^{-9} 1/bar, 20°C-on/, mely a $CaCO_3$ oldhatóságát jellemzi /Jakucs, 1971/.

A lecsapódott viz tömege energetikai uton is megközelithető:

$$\delta Q = L \cdot dm_v, \qquad /3/$$

ahol δQ: a lecsapódás során felszabaduló hő,

L: a vizgőz lecsapódási hője /2,45.10^6 J/kg, 20°C-on/.

δQ a dA felületen áthaladva a kőzetben szétoszlik. A hővezetés és az energiamegmaradás törvényei szerint:

$$\delta Q = -\lambda \cdot \operatorname{grad} T \cdot \vec{n} \cdot dA \cdot dt, \qquad /4/$$

ahol λ: a mészkő hővezetési együtthatója /2-3 J/°K.m.s/,

T: a kőzet hőmérséklete, $T = T(r, \vartheta, t)$,

$\vec{n}$: a felület normálisa a Q pontban,

$\operatorname{grad} T$: a hőmérséklet gradiense az üreg felületénél.

Mivel az üreg felülete izotermális, elemi uton belátható, hogy

$$\operatorname{grad} T \cdot \vec{n} = \cos\alpha \cdot (1 + \operatorname{tg}^2\alpha) \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R}. \qquad /5/$$

Az /1/-/5/ egyenletekből dm_v, dm_k és δQ változókat kiküszöbölve

$$dR = \frac{\lambda\sqrt[3]{k \cdot p}}{\varrho_k \cdot L}\left(1+tg^2\alpha\right)\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R} dt \qquad /6/$$

kifejezést nyerjük a gömbfülke ϑ irányban látszó felületi pontjának dt idő alatti dR növekményére. dR előállitható R t -szerinti parciális deriváltjával:

$$dR = \frac{\partial R}{\partial t}\, dt.$$

Differenciálgeometriai képletek szerint

$$tg\alpha = \frac{1}{R}\,\frac{\partial R}{\partial \vartheta}.$$

Igy végül a gömbfülke felületét megadó $R(\vartheta,t)$ függvényt a

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\lambda\sqrt[3]{k p}}{\varrho_k \cdot L}\left[1+\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)^2\right]\cdot\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R} \qquad /7/$$

nemlineáris, elsőfokú, parciális differenciálegyenlet határozza meg. A megoldáshoz ismerni kell a fülke kezdeti alakját /azaz a [illegible]tébe felnyuló kürtő egyenletét/:

$$R(\vartheta,t)\big|_{t=0} = R_o(\vartheta)\,, \qquad /8/$$

valamint az üreg körüli $T(r,\vartheta,t)$ hőmérsékleteloszlást. A hőmérséklet /kvázistacionárius folyamatról lévén szó/ a $\Delta T=0$ hővezetési differenciálegyenletből határozható meg, mely jelen esetben

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial T}{\partial\vartheta}\right)=0 \qquad /9/$$

alakot ölti. A /9/ megoldását a

$$T(r,\vartheta,t) = T_o\,, \qquad \text{ha } r = R(\vartheta,t), \qquad /1o/$$

$$T(r,\vartheta,t) = T_k-(T_o-T_k)\cdot\cos\vartheta\cdot\frac{r}{H}, \text{ha } r\to\infty \qquad /11/$$

peremfeltételek, valamint a

$$T(r,\vartheta,t) = f(r,\vartheta), \qquad \text{ha } t=0 \qquad /12/$$

kezdeti feltételek teszik egyértelművé. A /1o/ kifejezi, hogy a gömbfülke felületénél a hőmérséklet mindig T_0. A /11/ feltétel azt mutatja, hogy a hőmérséklet a fülkétől távol egyenletesen csökken a külszin felé /lásd az 1.a ábrát/. T_K a kőzet hőmérséklete az origó magasságában. A /12/-ben $f(r,\vartheta)$ a kőzet hőmérséklete az üreg kialakulásának kezdeti pillanatában.

A /7/ és /9/ matematikailag egy olyan különleges peremfeladatnak felel meg, ahol a perem előirt hőmérséklettel rendelkezik, de alakját változtatja a hőmérséklet gradiensének a peremen felvett értékével arányosan.

A /7/ és /9/ egyenletrendszer tetszőleges kezdeti feltételek mellett analitikusan nem megoldható. Néhány speciális eset azonban /hasadék kitágulása gömbfülke-sorrá, a gömbtől kissé eltérő alaku fülke növekedése/ komolyabb számitógép alkalmazása nélkül is számszerüen tárgyalható.

<u>Gömbfülke-sorok kialakulásának matematikai szimulációja</u>

Ha a barlangi tó felől egy hosszu, keskeny hasadék nyulik fel a főtébe, akkor nem egy különálló gömbfülke jön létre, hanem egymásba szakadó fülkék sorozata /Müller 1974/. Ennek kialakulását is tükrözi a /9/ egyenlet, csupán a hőmérsékletet a sikbeli $\Delta T = 0$ egyenletből kell meghatározni. Ez utóbbi feltétel lehetővé tette az u.n. gumimodell-elmélet alkalmazását, mellyel a $\Delta T = 0$ egyenlet tetszőleges peremfeltétel mellett megoldható.

A 4. ábra 5ooo éves lépésekben mutatja egy H=7o cm magas, 15 cm széles hasadék kereszt-szelvényének változásait. A modellben a levegő CO_2 tartalma 8% /p =o,o8 bar/, a barlangi tó hőmérséklete T_o=2o °C, a külszin alatti mélység 2o m volt. Látható, hogy a hasadék metszete először forditott vizcsepphez hasonló, majd kitágulva boltozata szabályos félkör lesz. Az üreg alsó része csak nagyon lassan bővül. A további növekedés az arányokat nem változtatja. Megállapithatjuk, hogy az "ideális alak" egy szük bejárati részből, egy tölcsérszerüen szélesedő oldalból és egy szabályos körivvel záródó boltozatból áll. A körív középpontja az első 2o ooo évben emelkedik, utánna azonban megáll, és csak a kör sugara nő.

Az 5. ábra ugyanilyen feltételek mellett mutatja a hasadék kitágulásának menetét azzal a különbséggel, hogy a kőzetről anizotrópiát tételezünk fel: függőleges irányba a hővezetési ill. oldódási paraméterei mások, mint vizszintesen./ez egyébként a mészkövek jellegzetes tulajdonsága/. Látható, hogy a járat boltozata most nem kör, hanem szabályos ellipszis.

Kissé beavatkozva az elméleti modell "müködésébe" tételezzük fel, hogy a korróziós folyamat megindulása után 3o ooo évvel egy 8x15 cm-es kődarab kiszakad a mennyezetből /5.b.ábra/. A növekedés további menete most hirtelen megváltozik. A felszakadásból igen gyorsan /1o ooo év alatt/ egy 4o cm átmérőjü fülke jön létre, mely egyre nő. Ugyanakkor az eredeti járat mennyezetén az oldóiás lelassult.

Ujabb 15 ooo év elteltével -modellünkben- történjen egy másik kis felszakadás is a járat bal oldalán/5.c.ábra/. A kiöblösödés azonnal megindul, de aszimmetrikusan. Ennek magyarázata abban rejlik, hogy a két üreg közötti kőzetrész felmelegedett, hőelvonó képessége csökkent, ezért a kondenzáció a fülkék egymáshoz közeli oldalán leállt. Viszont a külső oldalon a felharapódzó üregek a kőzet izotermáit egymáshoz nyomják, igy ott megnövekszik a termikus gradiens, és a kondenzáció felgyorsulhat. Ugy tünik, mintha a gömbfülkék "taszitanák" egymást.

6o ooo év alatt az eredeti hasadék egy lapos, 2m széles, 7o cm magas, eléggé szabálytalan alaku, kulcslyukszerü jarattá vált, melynek főtéjéből szintén szabálytalan alaku, bár elliptikus boltozattal záródó gömbfülkesorok nyulnak fel o,3 - o,6 m-re.

A gömbfülkék alakjának instabilitása

Egy barlangi üreg boltozata legyen jó közelitéssel R_o sugaru gömb /6.ábra/. A gömbtől való eltérés /ΔR/ igen kicsi R_o-hoz képest, de helyről-helyre változik, azaz ϑ-nak függvénye.

$$R(\vartheta,t) = R_o(t) + \Delta R(\vartheta,t). \qquad /13/$$

ΔR előállitható kicsiny sinus-hullámok lineáris kombinációjaként:

$$\Delta R = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(t) \cdot P_n(\cos\vartheta), \qquad /14/$$

ahol $P_n(\cos\vartheta)$: az n-ed rendü gömbfüggvényt jelöli,

$\varepsilon_n(t)$: az n-ed rendü hullám amplitudója.

Vizsgáljuk meg a /7/ - /9/ egyenletrendszer segitségével, hogy a kondenzviz-korrózió beindulása után e hullámok elsimulnak-e, vagy amplitudójuk felnövekszik.

Ismert /Frank-Mieses, 1966/, hogy a /9/ hővezetési differenciálegyenlet megoldása előállitható gömbfüggvényekkel:

$$T(r,\vartheta,t) = T_K - (T_o - T_K)\cdot\cos\vartheta\cdot\frac{r}{H} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(t)}{r^{n+1}} P_n(\cos\vartheta). \qquad /15/$$

Az $a_n(t)$ együtthatók ugy határozandók meg, hogy a fülke felületénél $/r=R/$ éppen T_o értéket adjon, de ugyanakkor a /7/-et is kielégitse. R -et a /13/-ból a /7/ és a /15/ egyenletbe irva, figyelembe véve a /1o/ és /14/ feltételeket, kihasználva, hogy $\Delta R \ll R_o$, és $r \ll H$, bevezetve a

$$K = \frac{\lambda\sqrt[3]{kp}}{\varrho_K \cdot L}$$

jelölést, végül

$$\begin{cases} \left[a_o - (T_o - T_K)\cdot R\right] + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{a_n}{R_o^n} - (T_o - T_K)\,\varepsilon_n\right]\cdot P_n(\cos\vartheta) = 0 \\ \left[\dfrac{dR_o}{dt} - K\dfrac{a_o}{R_o^2}\right] + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{d\varepsilon_n}{dt} - K\dfrac{a_n}{R_o^{n+2}}\right]\cdot P_n(\cos\vartheta) = 0 \end{cases}$$

immár lineáris egyenletrendszert nyerjük. E két egyenlet tetszőleges ϑ esetén csak ugy teljesülhet, ha a $[\cdot\cdot]$-ben álló mennyiségek külön-külön nullával egyenlőek. Mindegyik egy-egy differenciálegyenletet ad $R_o(t)$, ill. $\varepsilon_n(t)$-re:

$$\begin{cases} \dfrac{dR_o}{dt} = K\,\dfrac{T_o - T_k}{R_o} & /18/ \\[2ex] \dfrac{d\varepsilon_n}{dt} = (n+1)\cdot K\cdot\dfrac{T_o - T_k}{R_o^2}\,\varepsilon_n \qquad n = 1, 2, 3, \dots & /19/ \end{cases}$$

A /18/-at megoldva $R_o(t)$-re, a szabályos gömb tágulásának képletéhez jutunk /Szunyogh, 1982/:

$$R_o(t) = \sqrt{R_o^2(0) + 2\,K(T_o - T_k)\cdot t}\,. \qquad /2o/$$

A /19/ pedig

$$\varepsilon_n(t) = \varepsilon_n(0)\cdot\left[1 + 2\,\frac{K}{R_o^2(0)}(T_o - T_k)\,t\right]^{\frac{n+1}{2}} \qquad /21/$$

megoldásra vezet. Itt $R_o(0)$ a gömbfülke sugara a $t=0$ időpillanatban, $\varepsilon_n(0)$ pedig az n-edik hullám kezdeti amplitudója.

A /2o/ szerint a gömbfülke "középsugara" az időben négyzetgyökös függvény szerint, egyre lassulva nő /Szunyogh, 1982/. A /21/ viszont azt mutatja, hogy a gömbtől való eltérést okozó sinus-hullámok amplitudói 1, 1,5, 2, 2,5 stb. kitevőjü hatványfüggvények szerint egyre gyorsulva növekednek. Legyen tehát bármilyen kicsiny is kezdetben a gömbszimmetriától való ΔR eltérés, az az idő mulásával felerősödik./Egyedül abban az esetben maradhat a fülke boltozata gömb alaku, ha kezdetben is tökéletes gömb volt/.

A kondenzviz-korróziós gömbfülkék alakja tehát instabil. Ezen instabilitásból következik, hogy a "bizzar", sokszor semmiféle szabályosságot nem követő barlangi formák nem csak a kőzet inhomogenitásaira vezethetők vissza, hanem a kioldódás belső törvényei követelik meg.

Végezetül szeretném kifejezni köszönetemet Dr Dobróka Mihálynak és Dr Ernst Lajosnak segitő ötleteikért és odaadó támogatásukért.

Dr Szunyogh Gábor

Dr Szunyogh Gábor

Budapest, V.
Beloiannisz u. 9
1o54

Dr Szunyogh

Összefoglalás

A cikkben a hévizes eredetü gömbfülkék keletkezésének azt a hipotézisét vizsgáltuk, mely szerint az üreget a kőzetfalra lecsapódó és a levegő széndioxidjától agresszivvé váló viz oldja ki. A gömbfülke növekedését elsősorban az üreg pillanatnyi alakjának és a kőzet hőmérsékleteloszlásának egymásra ható rendszere szabályozza. E folyamat egy nemlineáris differenciálegyenlettel jellemezhető, melyet megoldva végigkövettük egy hasadék gömbfülkévé tágulásának 6o ooo éves időszakát. Bebizonyitottuk, hogy a gömbfülkék alakja instabil, mert a gömbszimmetrikustól való legkisebb eltérés is az oldódás során egyre növekszik.

Dr Szunyogh

Irodalomjegyzék

ERNST L./1961/: A karsztvizek telitettségéről - Karszt és Barlangkutató, I. Budapest, p. 21-23

FRANK - MIESES /1966/: A mechanika és a fizika differenciál- és integrálegyenletei - Műszaki Kiadó, Budapest.

JAKUCS L./1971/: A karsztok morfogenetikája - Akadémiai Kiadó, Budapest.

MÜLLER P./1974/:A melegforrás barlangok és gömbfülkék keletkezéséről - Karszt és Barlang, I. Budapest, p. 7-11

SZUNYOGH G./1982/: A hévizes eredetü gömbfülkék kioldódásának elméleti vizsgálata - Karszt és Barlang,II. Budapest, p. 83-88

Dr Szunyogh

Ábraszövegek

1. ábra. Izotermák a kőzetben egy sima/a/ és egy felnyuló kürtővel megtört /b/ főtájú barlangi terem felett. T_o a tó vizének hőmérséklete

2. ábra. A gömbfülke felületének megadására szolgáló koordináta-rendszer elhelyezkedése

3. ábra. A kioldódás alatt álló elemi kőzettérfogat elhelyezkedésének geometriája

4. ábra. Egy hasadék kiöblösödésének lépései a kioldódás során./Lépésköz: 5 000 év/

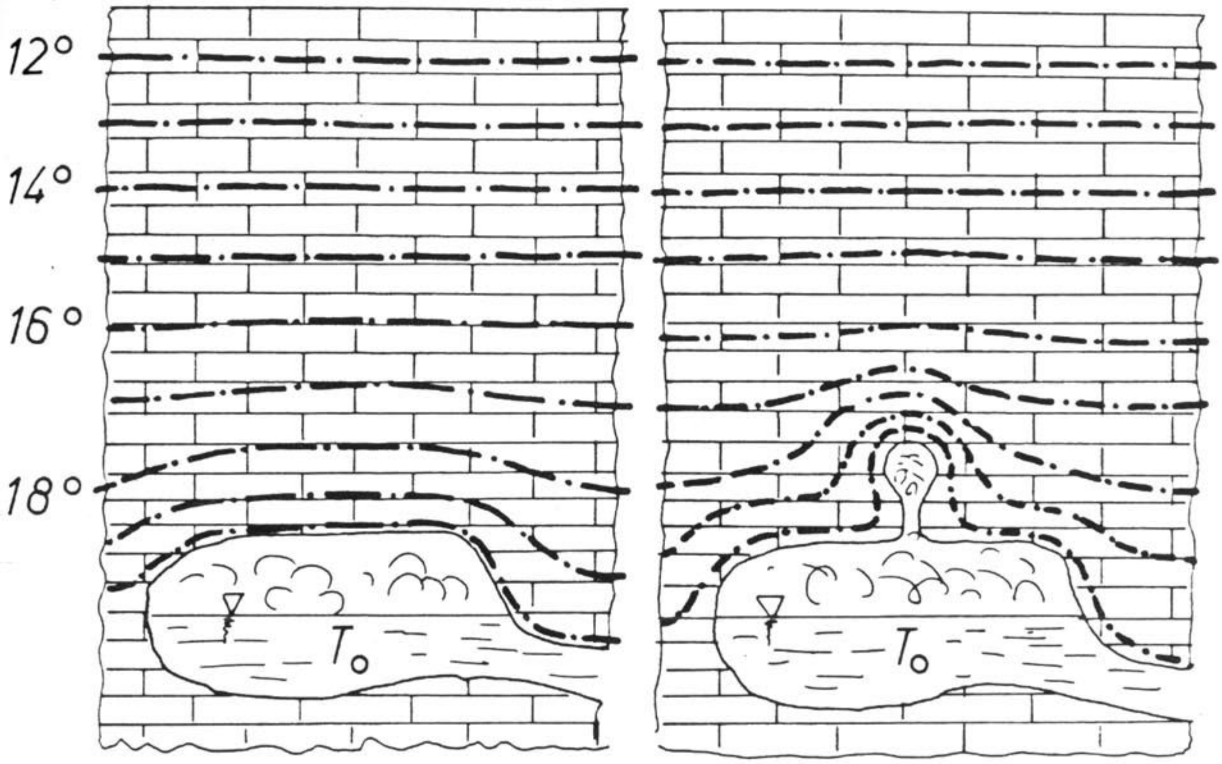
5. ábra. Egy hasadék kereszt-szelvényének változásai anizotróp kőzetben. /Lépésköz: 5 000 év/

   a. Zavartalan növekedés

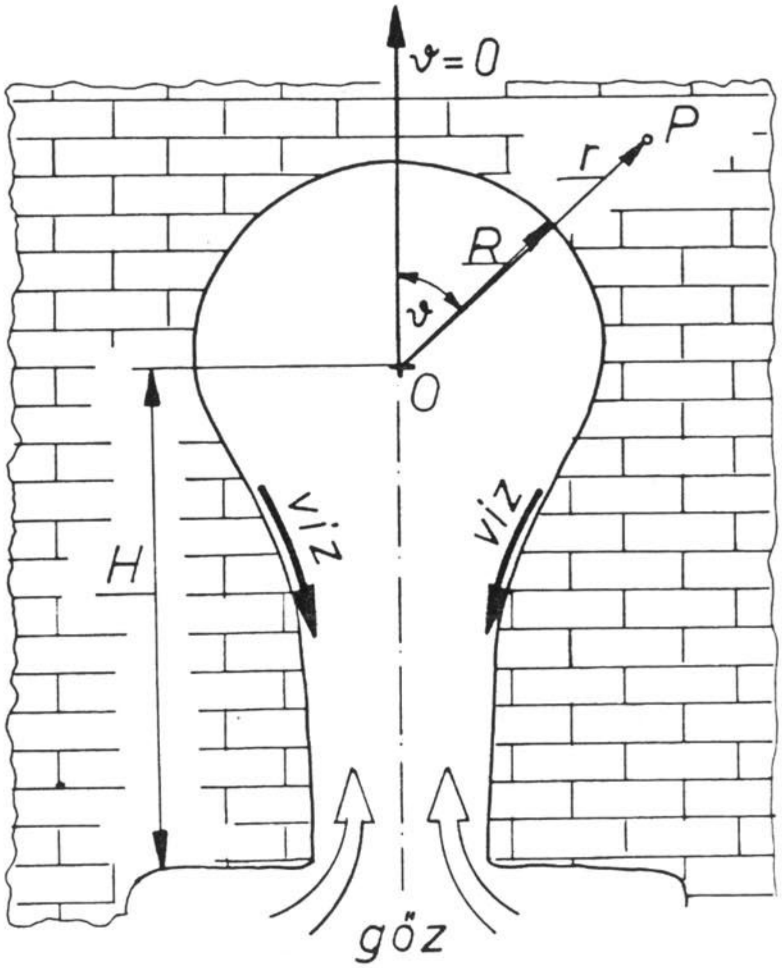
   b. Egy kis felszakadás hatása a további növekedésre

   c. Két, egyidejüleg felharapódzó kürtő egymásra hatása.

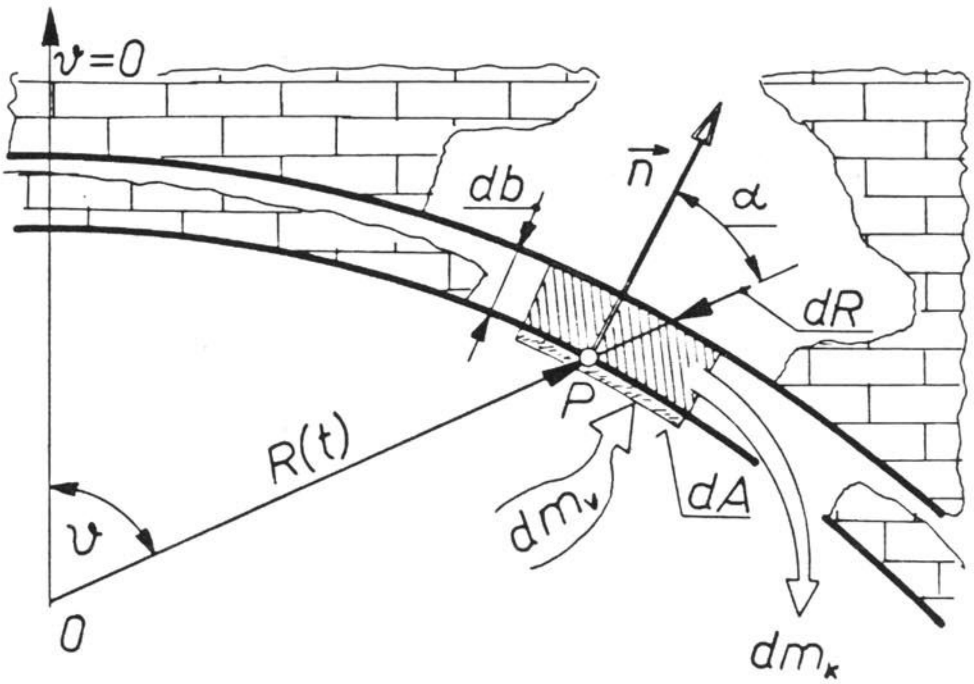
6. ábra. Gömbtől kissé eltérő alaku fülke méretei /jelölések /



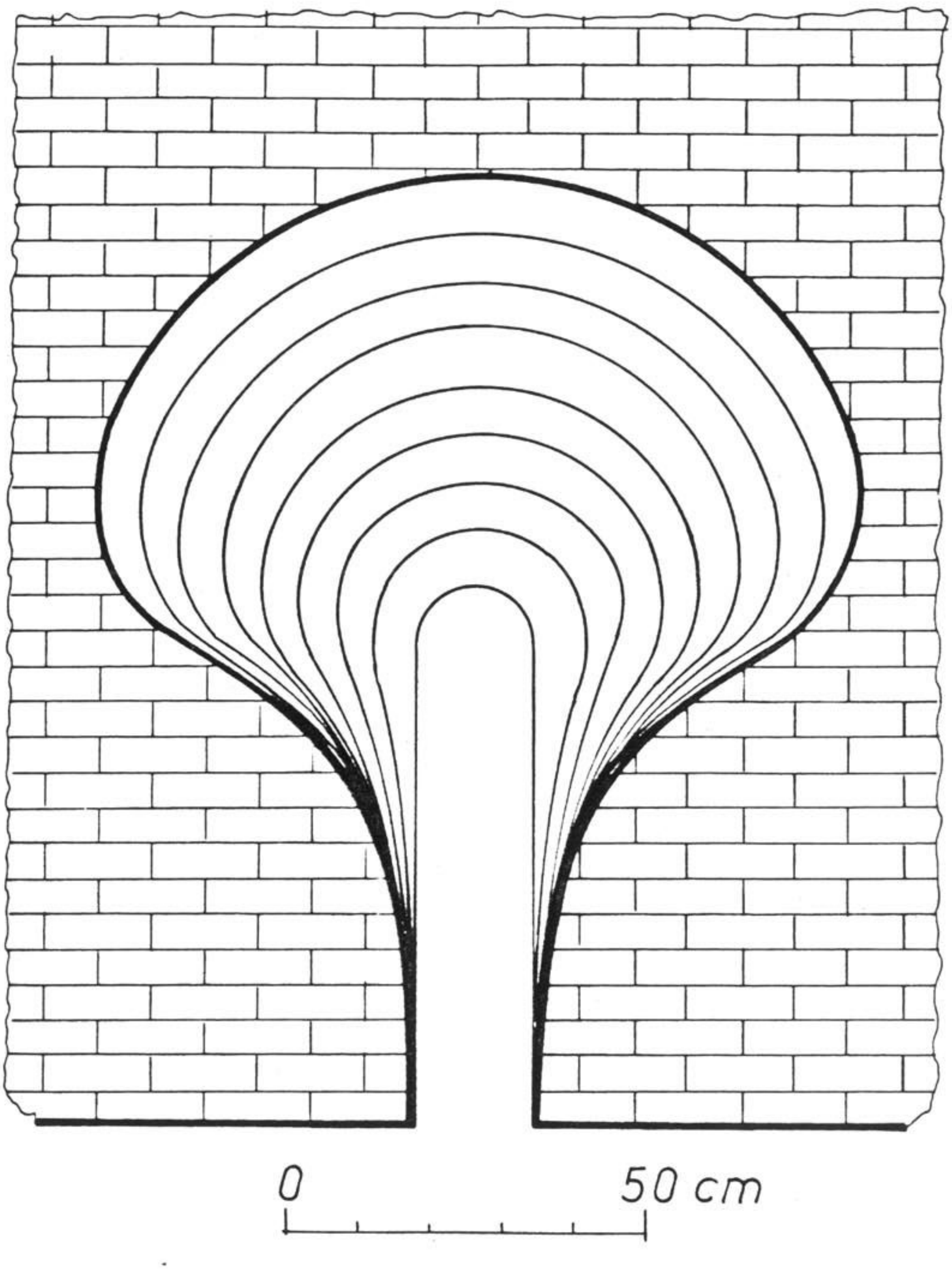
12°
14°
16°
18°
T_0
T_0

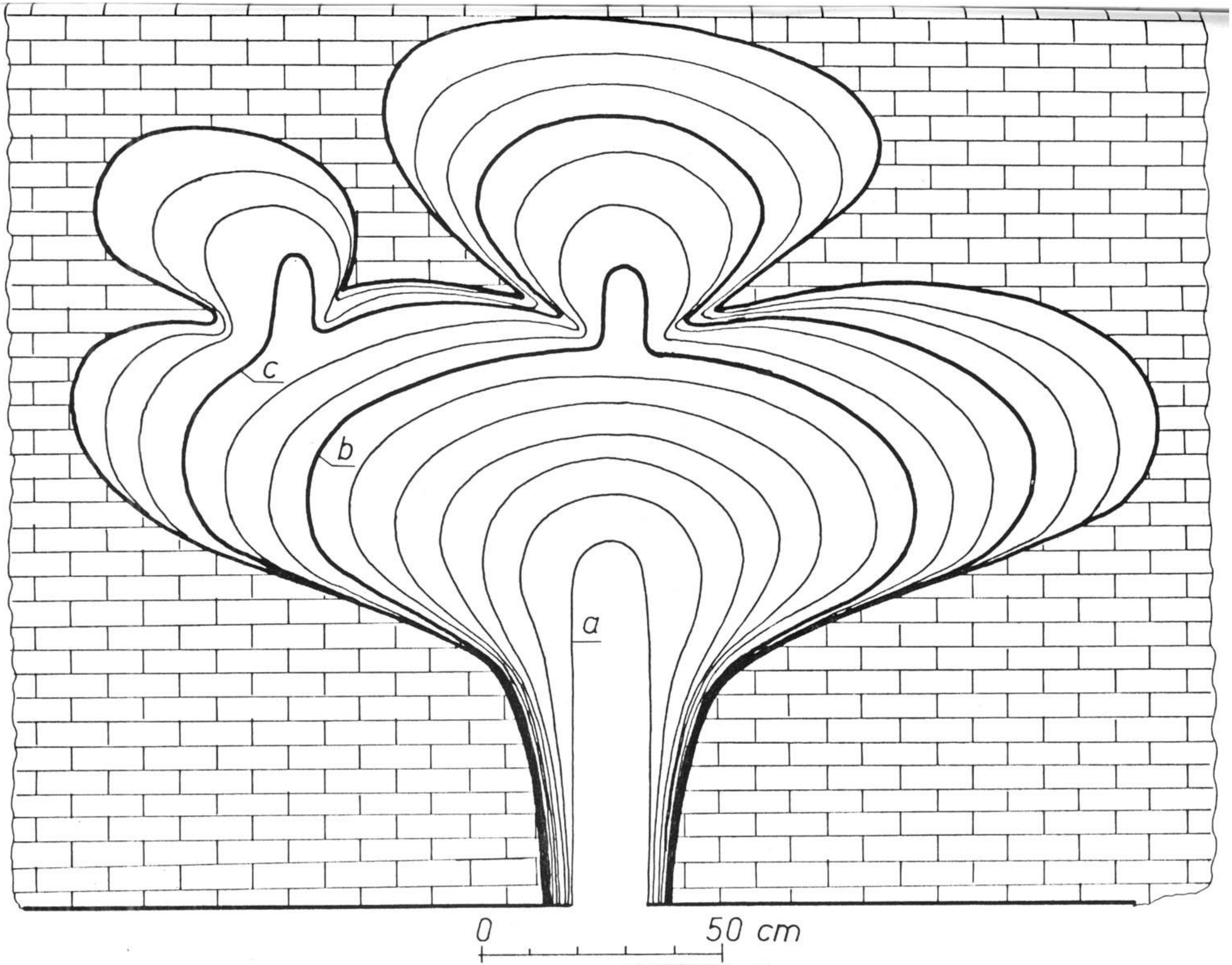


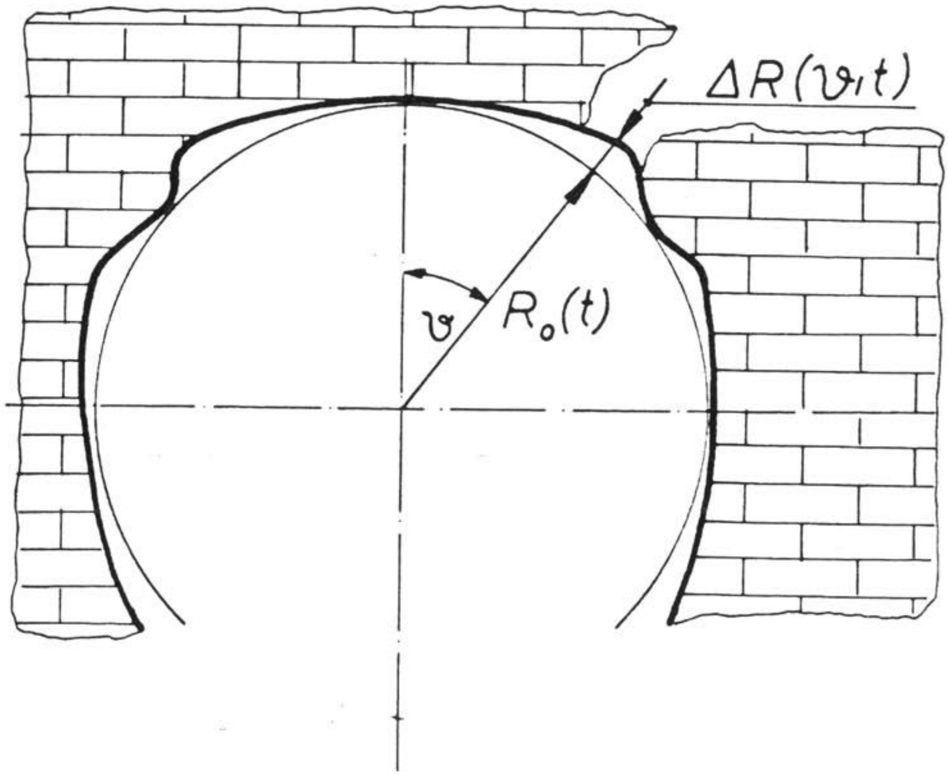
ϑ=0
P
r
R
ϑ
O
H
víz
víz
gőz



$\vartheta=0$
db
$\vec{n}$
α
dR
P
R(t)
ϑ
0
dm_v
dA
dm_K


0
50 cm


c
b
a
0
50 cm



ΔR(ϑ,t)
ϑ
R₀(t)