

DIGITÁLIS VÁLYÚMODELLEN VÉGZETT ÁRAMLÁSI SZIMULÁCIÓK ADATAINAK VIZSGÁLATA KÜLÖNBÖZŐ LEJTÉSI ÉS BECSATLAKOZÁSI PARAMÉTEREK ESETÉN

ANALYSIS OF FLOW SIMULATION DATA IN DIGITAL CHANNEL SYSTEM MODEL IN CASE OF DIFFERENT JUNCTION AND SLOPE ANGLE PARAMETERS

MITRE ZOLTÁN

Abstract: In the paper we present a special analysis of water flow simulation in a channel serial model, with special consideration to the vorticity of flow at the connecting points of the tributary channels. All of the 9 parallelized main channel have joined tributary channels with different junction angles from 10° to 90° by a step of 10° . We used CFD (Computational Fluid Dynamics) simulation algorithm to simulate 9 cm depth water flow, and yielded data about the vorticity and velocity with a resolution of 1 cm^3 . We made simulations with slope angle settings from 5° to 45° with a step of 5° . We calculated the average vorticity values of these data in every cross section situated 1 cm from each other along the main channel of the channel system. Then we fit two functions to these data, one function to all data, another function to data, which are not influenced by side channels. We determined the section of vorticity in the main channels by the values of crossing points of these functions. We represented the vorticity section values with column diagram in junction angle groups, where we could examine the tendency of these values in case of every slope angles. We also represented the vorticity section values with column diagram in slope angle groups, where we could examine the tendency of values in case of every junction angle. We found, the higher the slope angle the lower the vorticity section at the joining points of the main channel. And, the higher the joining angle the longer the vorticity section at the joining points of the main channel, but there are two local minimum places at 30° and 60° . Vertically we divided the waterflow to layers, then we yielded data about the spatial position of the vorticity. The highest vorticity values appeared at middle depth, near the walls of joining points of the main and side channels. The height of the joining side channel decreases the values of vorticity.

Keywords: rinnenkarr, main channel, side channel, solution, turbulence, CFD, simulation, vorticity, channel system

1. Bevezetés

Vizsgálatom célja, hogy a karos vályúrendszerekben a különböző paraméterekkel érkező mellékvályúk becsatlakozásánál a fővályúban létrejövő örvényességet digitálisan szimuláljam és a kapott adatokat vizsgáljam. A vizsgálattal a létrejövő örvények térbeli helyzetére is adatokat kívántam kapni.

A vályúrendszerek egy-egy fővályúból és azokhoz kapcsolódó mellékvályúkból épülnek fel. A vályúkarrban létrejövő áramlás két fajta lehet, lamináris és turbulens. Az előző esetben az oldó hatás minimális, míg az utóbbi esetben a létrejövő örvények hatására jelentős oldás jön létre (DREYBRODT 1988, SLABE T. 1995). A turbulens áramlás főként az egyes

karrvályúk egymásba csatlakozásánál és az azt követő szakaszokban jellemző (VERESS *et. al.* 2011, 2012).

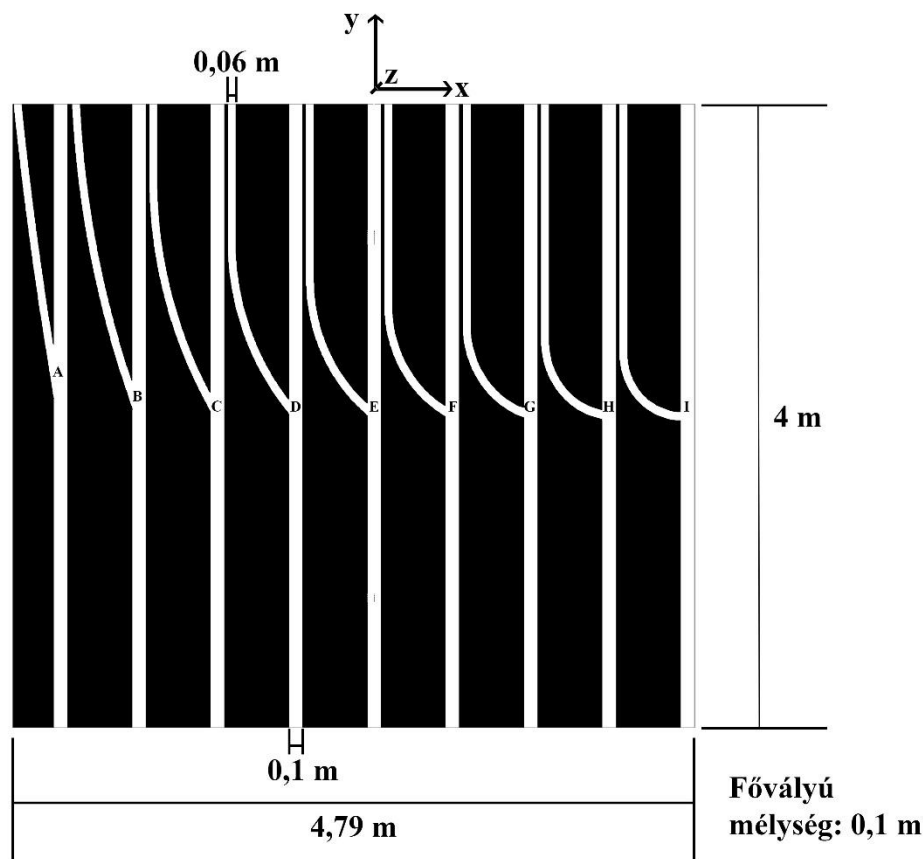
A vályúk (rinnenkarrok) morfológiáját terepi mérések és laboratóriumi mérések során vizsgálták (VERESS *et. al.* 2007, 2009, 2011). A terepi adatok alapján feltételezett áramlási viszonyok igazolása céljából készült laboratóriumi mérések során sikerült direkt módon megfigyelni az örvényléseket a becsatlakozások pontjainál és a fővályú ezt követő szakaszában (DEÁK *et. al.* 2012). A becsatlakozásnál kialakuló örvények miatt megnövekedett oldódás okozza a vályúk kiszélesedéseit.

A legutóbbi vizsgálatok már a digitális modellen zajlottak, ahol az áramlási szimulációra kifejlesztett speciális CFD (Computational Fluid Dynamics) szoftverkörnyezet segítségével fiziko-kémiai folyamatok szintjén sikerült vizsgálat alá venni a virtuális karrvályúban mozgó víz áramlási viszonyait. Az áramlástan Computational Fluid Dynamics (CFD) ága foglalkozik a folyadékok és gázok áramlásának számítógépes vizsgálatával, szimulációjával és azok szilárd testekkel való kölcsönhatásának modellezésével, leírásával. A CFD szimuláció egyik fontos kérdése, hogy az adott folyadék (vagy gáz) egy felülettel érintkezve vagy áramlás áramlással érintkezve milyen áramlási jelenségeket hoz létre. Az ilyen jellegű mozgások vizsgálatát nagy sebességű számítógépfürtökön végzik, felhasználva az áramlástan fizikai törvényeit, az egyes fizikai problémákat numerikus analízissel közelítik. A vályúrendszereket vizsgáló korábbi digitális kísérletben tetszőlegesen kiválasztott egyvályús rendszer és összetett vályúrendszer esetén is sikerült az örvényeket megfigyelni és következtetéseket levonni (JIYUAN TU *et. al.* 2013, MITRE 2016).

2. Módszerek

A jelen vizsgálathoz a korábbi munkáimban (MITRE 2016, 2017) részletezett CFD digitális áramlási szimulációt alkalmaztam, azonban most egy speciális digitális vályúmodellt készítettem AutoCAD program segítségével. A korábban alkalmazott modellektől eltérően egy vályúsorozatot hoztam létre, ahol egymással párhuzamosan húzódnak fővályúk és mellékvályúk. Azonban a mellékvályúk becsatlakozási szöge a szelvény mentén balról jobbra haladva 10° -tól 90° -ig, a korábban alkalmazott 10° -os léptetéssel emelkedik (*1. ábra*).

A mellékvályúk középvonala a fővályú középvonalába a legfelső peremtől 2 méter távolságra csatlakozik be, a becsatlakozás után a fővályú további 2 méter hosszan fut a szelvény legaljáig. A mellékvályúk hossza nem sokkal több 2 méternél, a görbületek nyomán azt kis mértékben meghaladja.



1 ábra: A digitális vályúsorozat alaprajza. Jelmagyarázat: A: 10°-os becsatlakozás, B: 20°-os becsatlakozás, C: 30°-os becsatlakozás, D: 40°-os becsatlakozás, E: 50°-os becsatlakozás, F: 60°-os becsatlakozás, G: 70°-os becsatlakozás, H: 80°-os becsatlakozás, I: 90°-os becsatlakozás.

Fig. 1.: Layout of the digital chanel serial. Legend: A: joining angle 10°, B: joining angle 20°, C: joining angle 30°, D: joining angle 40°, E: joining angle 50°, F: joining angle 60°, G: joining angle 70°, H: joining angle 80°, I: joining angle 90°.

A valóságos állapotokat utánózva a terepi mérések során felvett méretek átlagai alapján a fővályúnak 10 centiméter szélességet és mélységet, a mellékvályúnak 6 cm szélességet és 10 cm mélységet választottam. Az áramló víz mélységét 9 cm-nek választottam. A terepi körülmények között áramló víz mennyiségéről SZUNYOGH (1995) elméleti vizsgálatai szolgáltak információval. A digitális karrvályúk éleit lekerekítettem ahhoz hasonlóan, ahogyan a valóságban, terepi körülmények között is tapasztalhatjuk. E lekerekítést alkalmaztam a karrvályú talprészének alakjára is, hogy a valóságoshoz közeli „U” alakot kaphassak (MITRE 2017, SZUNYOGH 1995). A vályúrendszerből készítettem további 8 másolatot, melyek

paramétereit teljesen egyeznek az ismertetett „legelső” modellel, azonban a becsatlakozó mellékvályú mélységét modellenként 1 cm és 8 cm között változtattam, 1 cm-es léptetéssel. A mellékvályú minél kisebb mélységű, annál nagyobb szintkülönbséggel csatlakozik be a fővályúba.

A modellvályút a szimuláció koordináta rendszerében úgy helyeztem el, hogy az origó a modell szélességének, hosszúságának és magasságának felezőpontján (tehát a modell középpontjában) helyezkedjen el. Az x és y tengely az 1. ábra szerinti irányokban helyezkedik el, a z tengely pedig a jobbsodrású koordinátarendszereknek megfelelően az x,y síkra merőlegesen az olvasó irányába mutat. Az áramlás az y tengely pozitív szakasza felől a negatív szakasza felé halad, e tengellyel párhuzamosan.

Nagyteljesítményű (kifejezetten mérnöki számításokra összeállított Intel® Xeon® processzoros) számítógép segítségével mind a 9 modellvályúra elvégeztem a CFD szimulációt. A szimuláción 3 hónapig dolgozott a számítógép, amelynek során az összes vályúszelvény minden 1 cm³ felbontású térfogategységére egy örvényességi - létrejövő örvények átlagos fordulatszáma egy másodperc alatt - értéket kaptam.

Ezt követően meghatároztam az örvényes szakasz hosszát minden fővályúban. Ehhez a fővályú teljes keresztmetszetére (mélység és szélesség értékekre) átlagoltam az örvényesség értékeit, az adatbázis felbontásával egyenértékű 1 cm-res szakaszokban a fővályú hossza mentén haladva. Majd az egyes kiátlagolási szakaszok értékeiből kapott ponthalmazra függvényillesztést végeztem. Az örvénylevés alakulását a fővályú mentén az

$$(1) \quad \omega = \frac{a(y-f)+b}{c(y-f)^2+d(y-f)+e} + g$$

függvényalakokkal közelítettem, ahol ω az örvényességet, a, b, c, d, e, f, g pedig együtthatókat jelent, amelyek minden becsatlakozási szög és lejtőszög kombináció esetén (ez összesen 81 eset) különböző értékeket vesznek fel. Az (1) függvényalakra azért esett a választásom, mivel a vizsgált összes ponthalmaz esetén a legjobb korrelációt adta. Ezt követően a becsatlakozástól független örvényességi értékekre (tehát a fővályú felső kb. 1,5 méter hossza) függvényt illesztettem, amelyet az

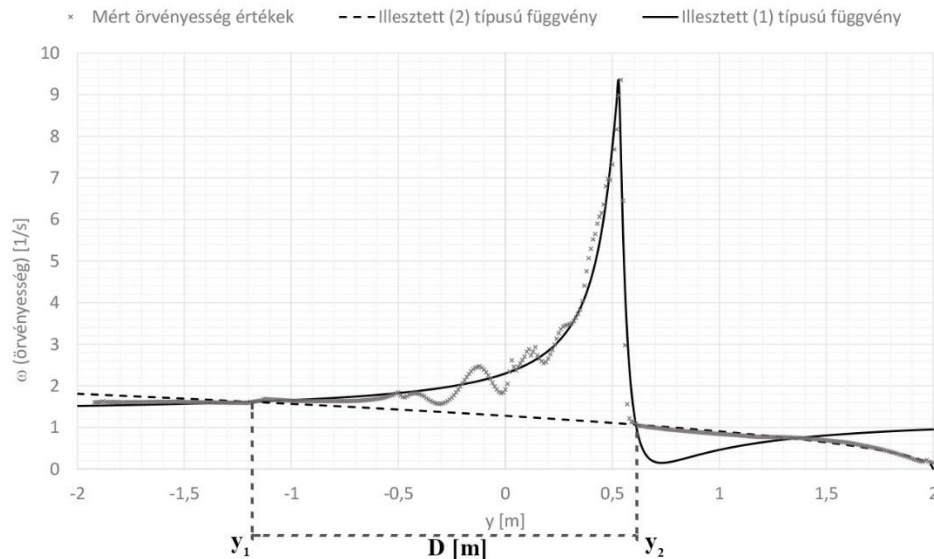
$$(2) \quad \omega = h\sqrt{-i(y-2)}$$

alakokkal közelítettem, ahol h, i együtthatók, amelyek minden esetben különböző értékeket vesznek fel. Az örvénylelési szakasz hosszát (D) minden

esetben az (1) és a (2) függvények azon két metszéspontjainak y koordinátáiból képeztem a

$$(3) \quad D = |y_2 - y_1|$$

összefüggés alapján, amelyek között az (1) függvény ω értékei nagyobbak vagy egyelők a (2) függvény ω értékeinél (2. ábra). Az így kapott D értékeket először oszlopdiagramokban majd hisztogramokban ábrázoltam. E hisztogramok MITRE-PÉNTEK (2014) dolgozatában a terepi és laboratóriumi vizsgálatok adatainak elemzése során megismert módszerrel teljesen analóg módon készültek. A függvényillesztéseket a Wolfram Research Mathematica program segítségével végeztem el.



2. ábra: Átlagolt örvényességi (ω) értékek grafikonja és ezekre illesztett függvények. Az y_1 és y_2 közötti szakasz kijelöli a D örvényléses szakasz hosszát.

Fig. 2.: Graph of average vorticity (ω) values and fit functions to these data. Section between y_1 and y_2 determine the D length of vorticity section.

Vizsgáltam továbbá a digitális modellen az örvénylések térbeli helyét és jellemzőit. A vizsgálatához a vízoszlopot a felbontással megegyező 1 cm vastag rétegekben, szeletenként, mélység szerint haladva, az orvosi komputertomográfia vizsgálat képalkotásához hasonlóan külön bontottam. Így összesen 9 réteget kaptam vályúsorozatonként, amely rétegekben szereplő örvényesség adatokat nagyságuk szerint különböző színekkel

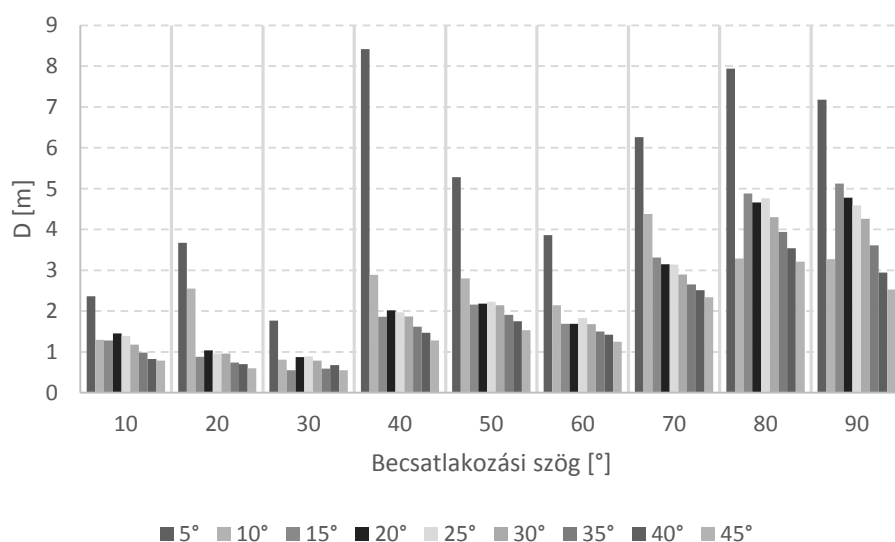
jelöltem. Egyes érdekesnek ítélt helyeken az örvényesség értékek térbeli vizsgálatához hossz- és keresztmetszet szerint szelvényezést is végeztem a korábbival megegyező felbontásban.

3. Eredmények

3.1. Fővályúban átlagolt adatok kiértékelése

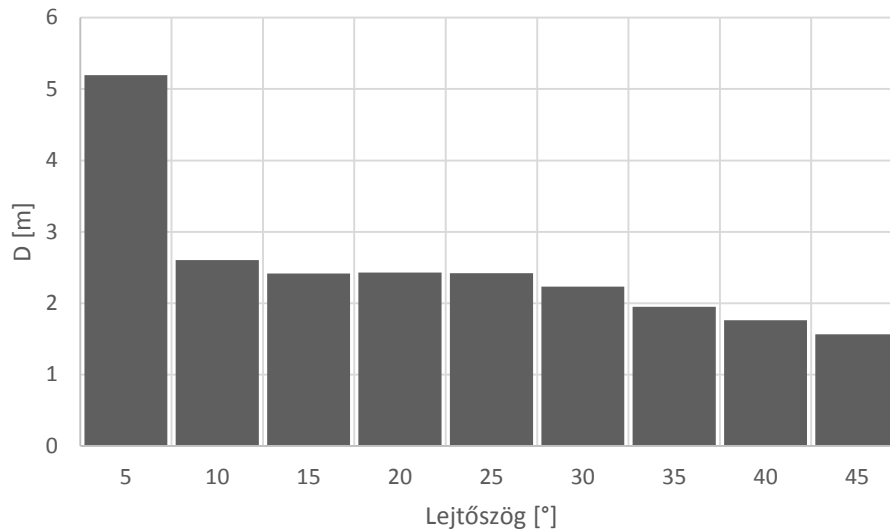
Az örvényesség szakaszának hossza a fővályúban a lejtőszög növekedésével csökkenést mutat. Ez jól megfigyelhető, ha a különböző dőlésszög esetén tapasztalható áramlási szakaszok hosszát adott becsatlakozási szögek szerint csoportosítom. Az örvénylées szakaszok hossza, bármely becsatlakozási szöget is veszem figyelembe, az 5°-os lejtőszög esetén a legnagyobb.

Amikor elkezdtem növelni a dőlésszöget, már a 10°-os dőlésnél megfigyelhető minden becsatlakozási szög esetén egy hirtelen örvényességi szakasz hossz csökkenés. Ezt követően, a dőlésszöget tovább növelve, elérve a 20°-os dőlést a 10°-60° illetve 80°-90° becsatlakozási szögek esetében egy nagyon enyhe növekedés tapasztalható az örvénylési szakasz hosszában. Ez a lokális növekedés a 70°-os becsatlakozásnál nem jellemző, ott a tendencia folyamatosan csökkenő. A 80°-os és 90°-os becsatlakozási szögnél a lokális növekedés már a 15°-os dőlésszög esetén megjelenik és sokkal markánsabban észlelhető, ennek oka jelenleg még tisztázatlan (3a ábra).



3a ábra: Örvénylési szakasz hosszak (D) alakulása a lejtőszög függvényében, becsatlakozási szögek szerint csoportosítva.

Fig 3a: Length of vorticity sections (D) as a function of slope angle, collected in groups of joining angles.



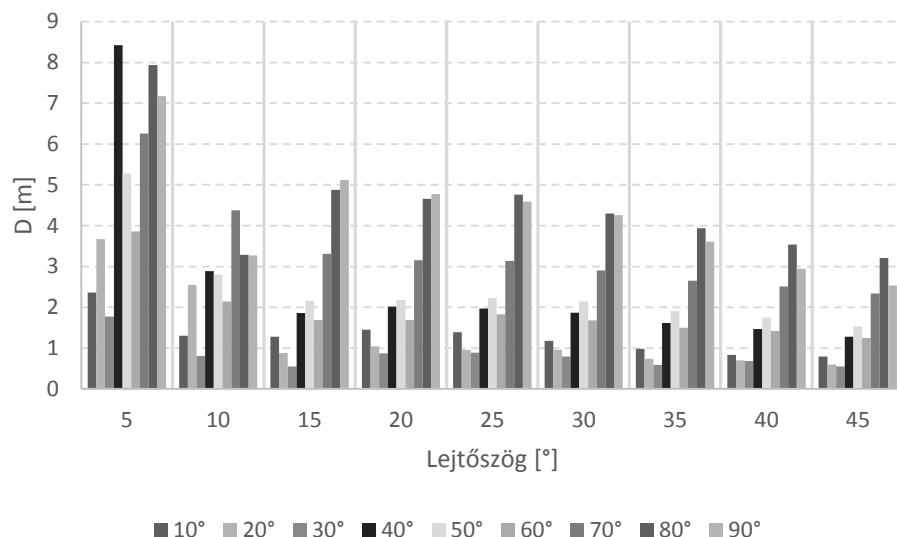
3b ábra: Az egyes lejtőszögek szerint kiátlagolt D értékekből készült hisztogram.
Fig 3b: Histogram conjured from averaged D data of given slope angles.

Az adatokból elkészített hisztogram jól mutatja azt, hogy a lejtőszög növekedésével csökken az örvényléses szakaszok hossza. E hisztogramban megjelenik 20° -os dőlésszög esetén az örvényléses szakasz hosszának stagnálása. De, összességében elmondható, hogy a lejtőszög növelésével az áramlási szakasz hossza csökkenést mutat (3b ábra).

Amennyiben a csoportosítást megváltoztatom, és a becsatlakozásoknál mért egyes örvénylési szakaszok hosszát a lejtőszögek szerint csoportosítom, akkor egy nehezen követhető tendenciát sikerül kimutatni. Minden dőlésszög csoportban a 40° -os és 50° -os becsatlakozások esetén egy enyhe lokális maximum tapasztalható. Ez a legmarkánsabban az 5° -os dőlésszög esetén jelenik meg. Minden esetben lokális minimum tapasztalható a 30° -os és a 60° -os becsatlakozási szög esetén.

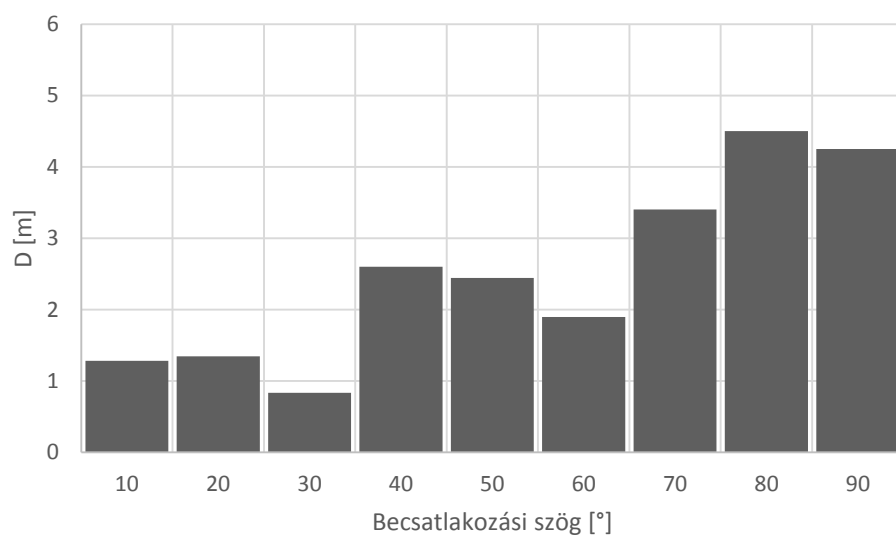
Általában az első, vagyis a 10° -os becsatlakozási szöget követően örvénylési szakasz hossz csökkenés tapasztalható a 30° -os becsatlakozásnál tapasztalható lokális minimum értékéig. Ettől az 5° -os és 10° -os dőlésszög eltérő, ahol a 20° -os becsatlakozási szöggel érkező mellékvályú jelentősen nagyobb örvénylési szakaszhosszt okoz, mint a legelső, a 10° -kal érkező.

A 15° -nál nagyobb dőlésnél megállapítható, hogy bármely dőlésszögnél is vizsgáltam a 80° -os és 90° -os becsatlakozások esetén mérhetjük a leghosszabb örvénylési szakaszokat (4a ábra). A becsatlakozási szögekből készített hisztogram a megfigyelt tendenciákat jól követi (4b ábra).



4a ábra: Örvénylési szakasz hosszak (D) alakulása a becsatlakozási szög függvényében, lejtőszögek szerint csoportosítva.

Fig 4a: Length of vorticity sections (D) as a function of joining angle, collected in groups of slope angles.

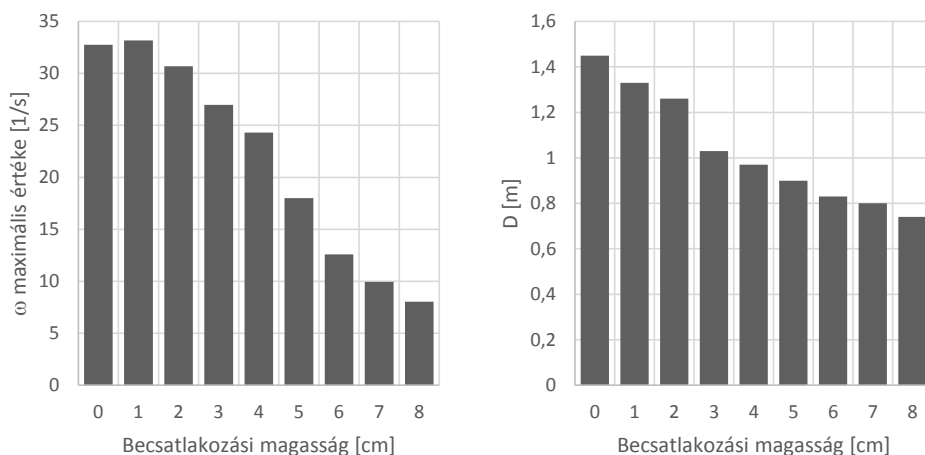


4b ábra: Az egyes becsatlakozási szögek szerint kiátlagolt D értékekből készült hisztogram.

Fig 4b: Histogram conjured from averaged D data of given joining angles.

A mellékvályú becsatlakozási szintkülönbségének növekedésével a létrejövő örvényesség szakaszhossza és az örvényesség maximális értéke (legnagyobb létrejövő örvényességi érték a fővályúban) is csökken. Ennek

oka a mellékvályúból beérkező vízmennyiség csekélyebb volta, amely a fővályóban áramló víztömegre kisebb kölcsönhatást tud gyakorolni (5a és 5b ábra).



5a ábra: Az örvényesség (ω) maximális értékei becsatlakozási magasság szerint 90°-os becsatlakozási szög és 25° dőlésszög esetén.

5b ábra: Az örvényes szakasz hossza (D) becsatlakozási magasság szerint 90°-os becsatlakozási szög és 25° dőlésszög esetén.

Fig 5a: Maximum values of vorticity (ω) at different junction heights at junction angle 90° and slope angle 25°.

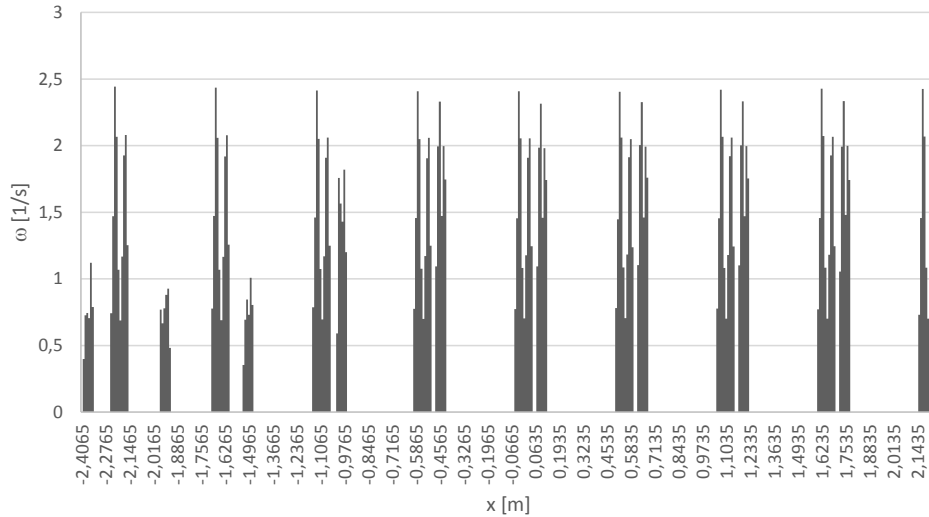
Fig 5b: Lengths of vorticity sections (D) at different junction heights at junction angle 90° and slope angle 25°.

3.2. Örvényesség térbeli elhelyezkedése

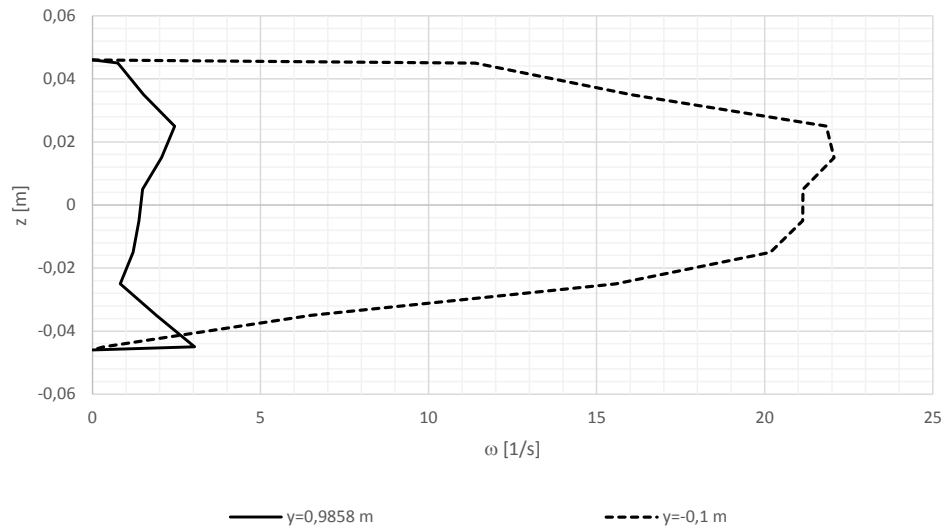
A fő és mellékvályúban a becsatlakozások feletti és attól független szakaszban a vályúk falánál gyenge örvényesség jön létre. Az örvények az áramló víz belső részében kevésbé jellemzők, ami az áramlások fizikájának is megfelelő jelenség (TÓTH 2012). Bármely becsatlakozási szöggel érkező mellékvályú feletti fővályúban is vizsgálom ezeket az örvényeket, értékeik a keresztszelvény mentén szinte azonosan alakulnak (6. ábra). Az örvényesség térbeli helyzetére azt lehet mondani, hogy a vályúfalakhoz közel a víz z irányú mélységének felső és alsó részén jellemzőek, az alsó részen az örvényesség értékei nagyobbak (7. ábra). Az örvényesség átlagos értéke a becsatlakozás helye felé haladva nagyon enyhe növekedést mutat, ez a 2. ábrán is látható.

A mellékvályúban, főleg azoknál, amelyek nagyobb görbülettel érik el a fővályút a görbület fala mentén is megjelennek örvények. Ezen örvények keletkezését az áramlás kanyarulat miatt történő irányváltásával magyarázom, amely kedvez a turbulens áramlás létrejöttének, így az

örvények kialakulásának. A nagyobb kanyarulat esetén a mellékvályú azt megelőző távolabbi részén is erősebb örvényesség jön létre.



6. ábra: Örvényesség (ω) értékei 5° -os lejtőszög esetén 4 cm mélyen a 8. ábrán jelölt x irányú szelvény mentén.
Fig. 6: Values of vorticity (ω) along the section in x direction highlighted in the Fig. 8. in case of slope angle 5° in 4 cm depth.

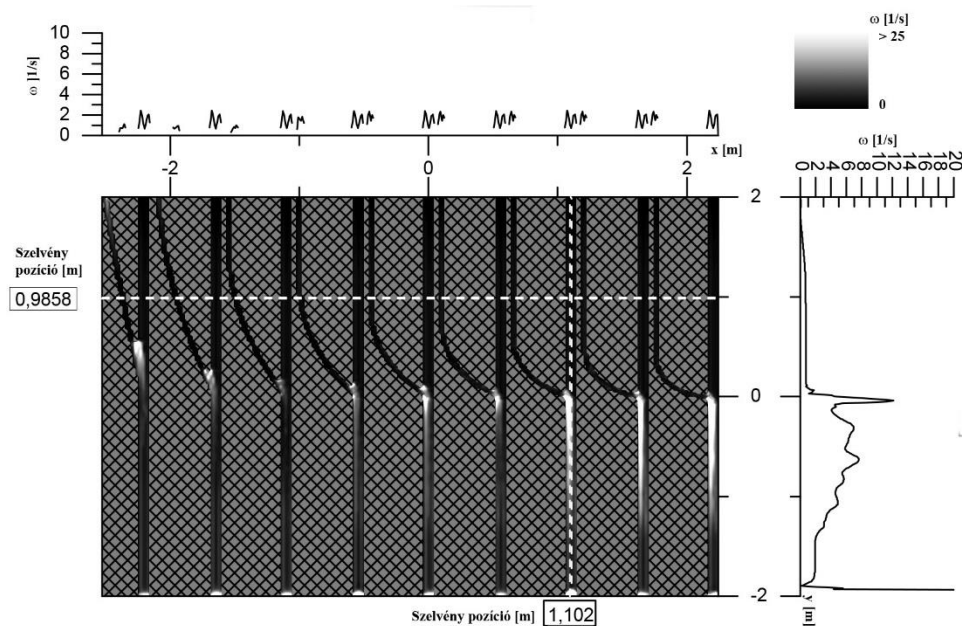


7. ábra: Örvényesség (ω) értékeinek alakulása z tengely (mélység) irányában egy becsatlakozás előtt és után választott keresztmetszéken a 70° -okkal becsatlakozó mellékvályút fogadó fővályúban, 5° -os dőlésszög esetén.
Fig. 7.: Tendency of vorticity (ω) values along axis z (depth) in a selected cross section before and after the junction point of side and main channel with 70° junction angle in case of 5° slope angle.

A becsatlakozás során az örvénylés maximuma a fővályúban, mélységet tekintve, 4-5 centiméter mélyen jön létre, amely a mellékvályú függésének növekedésével egyre feljebb tolódik (7. ábra). A mellékvályúban a becsatlakozás előtt az örvényesség emelkedése a találkozási ponttól távolabb nem tapasztalható, csupán a korábban említett fal menti illetve kanyarulat okozta kis örvények jelennek meg.

A becsatlakozásnál előtűnő nagy örvények a fővályú és a mellékvályú találkozása nyomán előálló két (folyásirány szerint) felső és alsó élnél jelennek meg, a becsatlakozási szögtől függően változatos értékekkel. A 10°-os mellékvályú becsatlakozásnál a találkozás felső pontjánál, a fővályúban és mellékvályúban is örvény jelenik meg. A mellékvályúban lévő örvény a becsatlakozási szög emelkedésével egyre jobban áthelyeződik a fővályú felé.

A becsatlakozási szög emelkedésével az örvények megjelennek a becsatlakozó mellékvályú alsó sarokpontjánál is. A 40°-os becsatlakozásnál a felső sarokponttal összevetve nagyjából egyforma örvényességet tapasztaltam, majd e becsatlakozási szög felett a domináns örvénylés az alsó sarokpontra helyeződik át, a felső sarokponton jóval kisebb örvényesség marad meg (8. ábra).



8. ábra: 5°-os dőlésszög esetén, 4 cm mélyen létrejövő örvényesség (ω) a digitális vályúsorozat modellben. Az örvényesség (ω) értékeinek változását hossz és kereszt-szelvény mentén részletesen lehet vizsgálni.
Fig. 8: Vorticity (ω) of the digital channel serial model in 4 cm depth in case of 5° slope angle. Change of vorticity (ω) data is examinable in detail along cross and length sections.

A mellékvályú becsatlakozása miatt előálló örvényesség a fővályúban jellemzően a becsatlakozás felőli oldalon helyezkedik el. A találkozási hely után az örvények az áramlás irányában haladva, egyre gyengülve, fokozatosan elterjednek az egész fővályú szélességében. Az örvények becsatlakozás oldali megjelenésének jelenségre korábbi vizsgálatok (MITRE 2016) is rámutattak, a mostani vizsgálatban azonban sikerült kimutatni, hogy az örvényesség a vízáramlás középmezységében a legnagyobb. A vízfelszínhez közel és a vízáramlás alján pedig kisebb örvényességi értékek a jellemzőek. A mellékvályú függésének növekedésével az örvényesség vízszintes elhelyezkedése nem változik, de helyzete a fővályúban függőlegesen, a mellékvályú függés nagyságával arányosan felfelé eltolódik, és értékei egyre kisebbek. A vízáramlás alján létrejövő örvényesség értékei szintén egyre kisebbek.

4. Következtetés

Megállapítottam, hogy az örvénylelési szakasz hosszát befolyásolja a becsatlakozó mellékvályú függésének mértéke, a lejtőszög és a becsatlakozási szög. A becsatlakozási szög növelésével az örvénylelési szakasz hossza növekszik, azonban két becsatlakozási szög értéknél (30° és 60°) lokális minimum jön létre. A lejtőszöget változtatva megfigyelhető, hogy kis dőlésszögeknél az örvénylelési szakasz hossza gyorsan csökken, majd közepes dőlésnél (15° - 25° fok) ez a szakasz stagnál, majd nagyobb dőlésszög esetén újra, enyhén csökkenő tendenciát vesz fel.

A lejtőszögek és becsatlakozási szögek által befolyásolt örvényességi szakaszhossz változásának hisztogramjai hasonlóak, mint a terepi kiöblösödési szakaszhosszak és a laborkísérletben megfigyelt áramlási szakaszhosszak hisztogramjai. A digitális szimulációk rámutattak arra, hogy a mellékvályú függésének növekedése gyengítő hatással bír a létrejövő örvényességre és annak szakaszhosszára. Ebből arra lehet következtetni, hogy a becsatlakozó mellékvályú nagy függése esetén a létrejövő oldó hatás mérsékeltebb.

Az áramlás jellegét tekintve megállapítható, hogy a becsatlakozástól távoli, így független szakaszokon a vályúfalak környezetében örvények jönnek létre. Ez mind a fővályú, mind a mellékvályú esetén tapasztalható. A mellékvályúknál az örvénylelés különösen akkor jön létre, ahol ívesebb áramlási pályája van a mellékvályúban áramló víznek.

A becsatlakozás után a fővályúban az örvények leginkább az áramlás vízmélységének a középső részén jönnek létre, helyzetüket tekintve pedig a

találkozó vályúfalak élei mentén jellegzetesek. A mellékvályú függését növelve az örvények függőleges pozíciója felfelé eltolódik.

A létrejövő örvények nagyobb becsatlakozási szög esetén különösen a folyásirányt tekintve alsó él mentén, kis becsatlakozási szög esetén a felső él mentén helyezkednek el. Utóbbi esetben örvény jelenik meg a mellékvályúban is. Mivel az örvények minden esetben ezen élek mentén és közepes vízmélységben jönnek létre, ezért az itt keletkező nagyobb oldóhatás a terepen az aláhajló fal kialakulását eredményezheti.

Irodalom

- DEÁK, GY. – SAMU, SZ. – PÉNTEK, K. – MITRE, Z. – VERESS, M. (2012): Vízáramlási modellkísérletek vályúrendszereken. *Karsztfejlődés* XVII.: pp. 155-163.
- DREYBRODT, W. (1988): *Processes in Karst Systems. Physics, Chemistry, and Geology.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 288 p.
- JIYUAN, T. - GUAN-HENG, Y. – CHAOQUN, L. (2013): *Computational Fluid Dynamics - A Practical Approach.* Second edition, Elsevier Ltd. United Kingdom, 440 p.
- MITRE, Z. – PÉNTEK, K. (2014): Karros vályúk morfometriai vizsgálata a mellékvályú becsatlakozási helyek közelében. *Karsztfejlődés* XIX. Szombathely, pp. 173-184.
- MITRE, Z. (2016): Vályúban áramló víz áramlási viszonyainak modellezése számítógépes szimulációval. *Karsztfejlődés* XXI. Szombathely, pp. 75-95. DOI: 10.17701/16.75-95
- MITRE, Z. (2017): Karros fővályúban létrejövő áramlások szimulációs vizsgálata. *Karsztfejlődés* XXII. Szombathely, pp. 77-88. DOI: 10.17701/17.77-88
- SLABE, T. (1995): *Cave Rocky Relief – Znaustvenaraziskovalni Center SAZU,* Ljubljana, 128 p.
- SZUNYOGH, G. (1995): Karrovályúk vízszállító-képességének elméleti meghatározása. *Karsztfejlődés* I., pp. 133-144.
- TÓTH, A. (2012): *Bevezetés az áramlástanba.* Miskolci Egyetem, Miskolc, 176 p.
- VERESS, M. – PÉNTEK, K. – CZÖPEK, I. – ZENTAI, Z. – DEÁK, GY. – MITRE, Z. (2007): Adatok a Totes Gebirgei lejtők karrosodásához. *Karsztfejlődés* XII. Szombathely, 2007. pp. 137-152.
- VERESS, M. – ZENTAI, Z. – PÉNTEK, K. – EÖRY, M. – MITRE, Z. (2009): Vályúfejlődés csupasz lejtőkön. *Karsztfejlődés* 14: pp. 139-159.

VERESS, M. – ZENTAI, Z. – PÉNTEK, K. – MITRE, Z. (2011): Rinnenkarr
rendszerek fejlődése. Karsztfejlődés XVI: pp. 71-85.

VERESS, M. – ZENTAI, Z. – PÉNTEK, K. – MITRE, Z. – DEÁK, GY. – SAMU,
SZ. (2012): Vályúrendszerek fővályúinak fejlődése.
Karsztfejlődés XVII.: pp. 131-154.